DE LINEIS DUPLICIS CURVATURAE SECTIONE SUPERFICIERUM ROTATORIARUM SECUNDI ORDINIS ORIUNDIS, QUARUM AXES ROTATIONIS SUNT PRINCIPALES ET ALTER ALTERI PARALLELI.

DISSERTATIO

QUAM AUCTORITATE

AMPLISSIMI PHILOSOPHORUM

ORDINIS

PRO SUMMIS

IN PHILOSOPHIA HONORIBUS

RITE OBTINENDIS

DIE XXIX. JANUARII M. A. MDCCCXLII.

H. L. Q. C.

PUBLICE DEFENDET

AUCTOR

ERNESTUS BAUMGARDT

POMMERANUS

CONTRA DISPUTABUNT:

GOTTL. HIELSCHER, STUD. PHILOS.
AD. KENNGOTT, STUD. PHILOS.
ROB. BAUM, CAND. PHILOS.

VRATISLAVIAE,

TYPIS FRITZIANIS.

VIRO REVERENDISSIMO

CAROLO PROX,

SUMMO ECCLESIAE NOVGORODENSIS
ARTISTITI

HUNC LIBELLUM

D. D. D.

AUCTOR.

Introductio.

Superficies rotatoria unaquaque linea seu directa seu curva circum axem firmum ducta exoritur. Quarum rotando formatarum superficierum, id quod facile intelligitur, proprium est, ut earum lineae, quas vocant normales, omnes ad unam axem illum transeant sive pervadant. Normalium linearum autem aequationes cuique superficiei puncto, cujus coordinatae sunt x, y, z, respondentes hae sunt:

$$x^1 - x + (z^1 - z)\frac{dz}{dx} = o$$

$$y^1 - x + (z^1 - z)\frac{dz}{dy} = o$$

Positis igitur axis rotatorii aequationibus $\left.\begin{array}{l} x^1 = Az^1 + a \\ y^1 = Bz^1 + b \end{array}\right\}$ universa omnium superficierum rotatoriarum aequatio, quicunque angulus inter axem rotatorium planumque xy, quaelibet curva movenda, denique quaelibet quantitates $x^1 y^1 z^1$ sunt, ita formatur, ut eaedem $(x^1, y^1 z^1)$ ex quatuor illis aequationibus eliminentur: $A(b - y) - B(a - x) + (b - y + Bz)\frac{dz}{dx} - (a - x + Az)\frac{dz}{dy} = o$, cujus totum seu integrum integrale erit $(x - a)^2 + (y - b)^2 + z = \varphi(Ax + By + z)$. Si secundum id, quod nobis propositum est, axis rotatorius cum axe z congruit, illae aequationes multo

simpliciores redduntur, quum A, B, a, b evanescentibus, commutentur in $x\frac{dz}{dy} - y\frac{dz}{dx} = 0$ et $x^2 + y^2 = \varphi(z)$ seu, id quod idem est $z = \varphi^1 (x^2 + y^2)$, ubi φ et φ^1 functiones pro arbitrio factae sunt. Aequationes antecedentes in universum superficierum rotatoriarum sunt, cujuscunque formae rotans illa curva est, quin etiam licet, eam non totam cohaerere. Quum igitur numerus exponens quantitatis z numerum 2 egredi non possit, universa superficierum rotatoriarum secundi ordinis aequatio, axe rotatorio perpendiculari in axe z posito, erit, quae sequitur $x^2 + y^2 = a + bz + cz^2$; procreantis curvae aequatio, si axem z aequalem ponimus abscissarum axi, haecce ergo erit: $v^2 = a + bz + cz^2$, sectionis conicae aequatio. Amborum corporum rotatoriorum axes rotatorii, quum paralleli, itaque in uno eodemque plano sint, et quum axis x totus in eodem atque primi corporis rotatorii vertex in initio coordinatarum sit, horum corporum, si eorum axium distantia = „a„ est, aequationes erunt:

$$x^2 + y^2 = mz + nz^2$$
$$(x - a)^2 + y^2 = m_, (z - b) + n_, (z - b)^2$$

(b = distantiae, quae esse potest, verticis secundi corporis et axis x posita). Quae conjunctae universam lineae curvae, quae fit corporibus illis secantibus, aequationem formant:

$$\text{I. } x^2 + y^2 = mz + nz^2$$
$$\text{II. } 2ax = h + fz + gz^2$$

(aequatione II a I substracta $(a^2 + m_, b - n_, b^2) = h$ $(m - m_, + 2n_, b) = f$, $(n - n_,) = g$ posita). Tribus coordinatis ex his aequationibus paullatim eliminatis curvae projectiones in tribus diversis planis habemus, quippe quae curvae disquisitionem in universum multo faciliorem reddant, analysi autem lineae duplicis curvaturae instituendae nullo modo deesse possint, quum eam sine projectionibus institui non liceat. Projectionem curvae in plano xz supra jam invenimus:

$$\text{I. } 2ax = h + fz + gz^2$$

II. $4a^2y^2 = -h^2 + (4a^2m - 2fh)z + (4a^2n - f^2 - 2gh)z^2 - 2fgz^3 - g^2z^4$ in plano yz

III. $(g(x^2+y^2) - n(2ax-h))^2 = (f(x^2+y^2) - m(2ax-h))(fn-gm)$ in plano xy.

Sed quum lineae duplicis curvaturae rotatione sectionum conicarum oriundae nobis tantummodo disquirendae sint, hujus rei autem in universa omnium secando oriundarum curvarum aequatione formanda nondum rationem habuerimus, primum nobis disquirendum videtur, quibus conditionibus illae universae aequationes linearum duplicis curvaturae aequationes sint. Quod quidem vario modo ostendi potest. Nobis videtur ita faciendum: si curva nostra tota in uno plano esset, hujus aequatio $= Ax + By + Cz + D = o$ cum curvae aequationibus

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = mz + nz^2 \\ 2ax = h + fz + gz^2 \end{array}\right\}$$ conjuncta nihil aliud, nisi quod hae jam exprimunt, exprimère posset, ex quibus aequationibus derivatae projectionum aequationes ob hanc causam cum aequationibus I, II, III congruere deberent. Est autem projectionis in yz aequatio ex $2ax = h + fz + gz^2$ et $Ax + By + Cz + D = o$ derivata.

$$Ah + Afz + Agz^2 + 2aBy + 2aCz + 2aD = o,$$

quae ab illa II $4a^2y^2 =$ etc. differt, quare haec aequatio $Ah + Afz + Agz^2 + 2aBy + 2aCz + 2aD = o$ per se $= o$ sit necesse est. Itaque $Ah + 2aD = o$, $Af + 2aC = o$, $Ag = o$, $2aB = o$, sive $B = o$, $g = o$ $\frac{c}{A} = -\frac{f}{2a}$, $\frac{D}{A} = -\frac{h}{2a}$, quapropter plani aequatio in hancce permutatur $x = \frac{f}{2a}z + \frac{h}{2a}$. Quum $B = o$ sit, eliminatio quantitatis x inter aequationes $2ax = h + fz + gz^2$ et $Ax + By + Cz + D = o$ projectionis aequationem in yz offere non poterat, quum y tota evanesceret; x autem ex aequationibus $2ax = h + fz + gz^2$ et $x = \frac{fz}{2a} + \frac{h}{2a}$ eliminata aequatio projectionis erit: $4a^2y^2 = -h^2 + (4a^2m - 2fh)z + (4a^2n - f^2)z^2$, quae

cum II congruit. si, ut supra invenimus, $g = o$ ponimus. Potest igitur curva nostra plana esse, si $g = o$ est, quapropter corpora paraboloidea semper in plana curva secantur, quum in iis $n, = n$, ergo $g = o$ esse oporteat. Si $g = o$ est, curva exorta sectio conica cujuslibet generis, saepius etiam infinitorum ramorum erit; curva nostra duplicis curvaturae non item. Quantitas „ a „ neque negativa neque $= o$ esse potest, quum curvae nostrae aequationes, „ a „ $= o$ posita, futurae essent:

$$x^2 + y^2 = mz + nz^2$$
$$h + fz + gz^2 = o$$

Si hujus ultimae aequationis radices sunt K et L, curva nostra tanquam sectio plani duplicis $(z - K)$ $(z - L)$ et primi corporis rotatorii habenda est. Utrumque horum planorum igitur parallelum plano xy est. Si $(mK + nK^2)$ et $(mL + nL^2)$ negativa est, neutrum eorum illud primum corpus rotatorium secabit, quod autem attingit alterum planum, si $K = -\frac{m}{n}$ seu $= o$, alterum, si $L = -\frac{m}{n}$ seu $= o$ est, idque in puncto aliquo axis sui, quod etiam vertex esse potest $(K = o,\ L = o)$. Sed si altera harum quantitatum $(mK + nK^2)$, $(mL + nL^2)$ positiva est, curva unum circulum, si utraque positiva est, duos circulos complectitur, in quibus superficies rotatoriae secari aut attingi possunt; et curvam tanquam ex duobus circulis combinatam, semper autem tantum unius curvaturae, habere possumus. Itaque „ a „ nunquam $= o$ ponenda. Nobis disquisitionem autem hujusce curvae instituentibus extremorum coordinatarum valorum, quibus curvae certi fines circumscribantur, imprimis ratio habenda videtur, tum de maximis ac minimis, denique de linearum tangentium situ, de punctis reversionis cet. dicendum. Quo in disquirendo non tam projectiones ipsae, quam eae aequationes, quae una alterave variabilium quantitatum in ea $= o$ posita, exoriuntur, praecipue considerabuntur. Quarum aequationum radices, utrum verae seu reales an imaginariae (et quot harum, quot illarum) sint, imprimis perpendendum. Praeterea disquisitiones de radicum natura instituendae

multo difficiliores fieri videntur, quum quarumdam conditionum pro arbitrio inter nostrarum projectionum constantes positarum, quibus disquirendae aequationis gradus commutetur, rationem habere debeamus. Sunt autem duae tantum conditiones eaeque simplicissimae, quas universae curvae disquisitioni praemittere utile videtur. Projectionis enim in xy aequatio:

III. $(g(x^2+y^2)-n(2ax-h))^2=(f(x^2+y^2)-m(2ax-h))(fn-gm)$ quum et quoad y et quoad x quarti ordinis sit, in curva disquirenda parvi momenti et difficilior explicatu esset, nisi una conditione simplicior redderetur atque meliorem summam praeberet, quam ceterae cunctae projectionum aequationes. Commutatur enim haec aequatio:

III. $(fn-gm)=o$ i. e. $(nm-nm_,+2nn_,b)=mn-mn_,)$ sive $b=\frac{1}{2}\left\{\frac{m_1}{n_1}-\frac{m}{n}\right\}$ posita, in hanc:

$$gx^2+gy^2-2anx-nh=o \text{ sive}$$

$$y^2=-\frac{nh}{g}+\frac{2anx}{g}-x^2,$$

quae multo facilior disquisitu, quam, eadem conditione posita, projectionis in yz aequatio est. Haec conditio $fn=gm$ semper permittitur, quaecunque corpora rotatoria procreantia sunt, uno tantum corpore paraboloideo excepto, nam, quia in hujus aequatione n, et $n=o$ est, $b=\frac{1}{2}\left\{\frac{m_1}{n_1}-\frac{m}{n}\right\}=\infty$ esset, quod non licet. Projectionis in yz aequatio, ut antea commemoratum est, quadrata fieri poterat, quo curva unius curvaturae redderetur; sed si $y=o$ et h, i. e. $a^2+m_,b-n_,b^2=o$ esset, quod admitti potest, haec aequatio in hancce permutaretur:

$$(4a^2m-2fh)+(4a^2n-f^2-2gh)z-2gfz^2$$
$$-g^2z^3=o$$

quae tertii ordinis est. Quin etiam ad secundum ordinem reduceretur, $4a^2m-2fh=o$ posita, quod quidem, si primum corpus rotatorium directus duplex conus esset, accideret. Neque autem hanc conditionem ab universa

($h = o$) excipi oportet. Haec quoque conditio $h = o$ ad omnia corpora rotantia pertinebit, dummodo valor quantitatum „a„ et „b„ rite constituatur; est enim $b^2 - \frac{m_1}{n}, b = \frac{a^2}{n_1}$ et $b = \frac{m_1}{4n_1} \pm \sqrt{\left\{\frac{m_1^2}{4\,n_1^2} + \frac{a^2}{n_1}\right\}}$, unde n_1 positiva posita, unicuique valori „a„ certus valor „b„ respondebit, etiam si n_1 negativa ponatur, „a„ tam parva facienda est, ut $\frac{a^2}{n_1} = \text{aut} < \frac{m_1^2}{4\,n_1^2}$ sit, quare b nunquam imaginarium valorem recipere potest.

§ 1.

Curvae nostrae projectio in plano xz, ut ex ejus aequatione constat: $2\,ax = h + fz + gz^2$ parabola est, cujus axis axi x parallelus. Quod ut clarius sit, initium coordinatarum $x = v + \beta$, $z = u + \alpha$ posita, in parabolae vertice collocabimus, quapropter

$$2\,av + 2\,a\beta = h + fu + f\alpha + gu^2 + 2\,gu\alpha + g\alpha^2$$
$$2\,av = h - 2\,a\beta + f\alpha + g\alpha^2 + (f + 2\,g\alpha)\,u + gu^2.$$

$\alpha = \frac{-f}{2\,g}$ posita, $u^2 = \frac{8\,ag - 4\,gh + 8\,ag\beta + f^2}{4\,g^2}$ est, deinde $\beta = -\frac{4\,gh - f^2}{8\,ag}$ posita, simplex parabolae aequatio ad ejus axem spectans $u^2 = \frac{2a}{g}\,v$ efficitur, cujus parameter $= \frac{2a}{g}$, coordinatae verticis $x = \beta$, $z = \alpha$. Quanquam curva nobis disquirenda superficiei illi cylindricae planum xz in hac parabola perpendiculariter secanti haud dubie inest, tamen, id quod liquido constat, cuique hujus parabolae puncto punctum certum curvae respondere, affirmari minime licet. Deinde quum curvae aequatio non nisi pares potentias y contineat, ejus pars supra xz jacens eandem atque quae infra hoc planum est, formam habebit,

partestamen non congruunt, verum tantummodo, quod dicunt symmetricae erunt; utrum conjunctae inter se sint, necne, infra patebit. Potest denique curva nostra non unquam ramos infinitos habere, quod ex aequatione II constat, quum z, si $= \infty$ ($-$ aut $+$) poneretur, y negativa redderetur, quod admitti non potest.

§ 2.

In introductione commemoratum est, si $fn - gm = o$ ponatur, aequationem projectionis in xy multo faciliorem explicatu fieri, quod in hac paragrapho nobis disquirendum erit. Projectionum aequationes in xy hae igitur erunt:

$$\text{I. } 2\,ax = h + fz + gz^2$$

$$\text{II. } y^2 = -\frac{hn}{g} + \frac{2\,anx}{g} - x^2$$

Quod ad I. eaque significatam parabolam attinet, vide § 1 Parameter positivus aut negativus esse potest, prout g positiva aut negativa est, unde parabola etiam secundum parametrum aut ad positivam aut ad negativam axis x directionem porrigitur. Sunt igitur fines abscissae x hac aequatione in xz jam constituti, $+$ g posita, ab $x = \frac{4\,gh - f^2}{8\,ag}$ usque ad $+ \infty$, et, $-$ g posita, ab $- \infty$ usque ad $x = -\frac{4\,gh - f^2}{8\,ag}$; z hac aequatione fines suos non designatos habet. Projectio curvae in plano xy circulus est, quum ejus aequatio commutata sit: $y^2 + \left\{x - \frac{an}{g}\right\}^2 = \frac{a^2n^2 - ghn}{g^2}$; cujus circuli centrum semper in axe x jacens ab initio coordinatarum distat $= \frac{an}{g}$ (versus negativam aut positivam hujus axis directionem, prout g negativa aut positiva quantitas est). Radius circuli $=$

$\sqrt{\frac{a^2n^2 - ghn}{g^2}}$ aut imaginarius, aut $= o$, aut denique realis esse potest; imaginarius erit, si ghn positiva atque $> a^2n^2$ est, quo pacto neque circulum projectio format, neque omnino projectio in xy esse potest. Quod quidem fit, si alterum corpus rotatorium aut totum in altero jacet aut extra hoc jacens ab eo non tangitur. Si $a^2n^2 - ghn = o$ est, etiam $a^2n - gh = o$ esse debet, quum $n = o$ esse non liceat. Hoc pacto projectio in xy ad unum punctum reducitur, cujus coordinatae $y = o$, $x = \frac{an}{g}$. Deest quidem hic quoque curvae projectio in xy, nihilosecius huic puncto singulari punctum singulare curvae respondebit, nisi valori $x = \frac{an}{g}$ imaginarius valor z respondet. Est autem $z = u - \frac{f}{2g}$, realis igitur simul cum „u„ deinde $u^2 = \frac{2\,ax}{g} - \left\{\frac{4\,gh - f^2}{4\,g^2}\right\}$, x igitur $= \frac{an}{g}$ substituta, $u^2 = \frac{8\,a^2n - 4\,gh + f^2}{4\,g^2}$, et quum $gh = a^2n$, $u^2 = \frac{4\,a^2n + f^2}{4\,g^2}$. Si $4a^2n + f^2$ negativum valorem habet, z imaginaria est, si $= o$, $z = \frac{-f}{2\,g}$ redditur, et parabolicus vertex projectionis in xz unicum reale singulare punctum curvae nostrae ostendet, quod simul punctum erit, in quo ambo corpora rotatoria se tangunt. Denique si $\frac{4\,a^2n + f^2}{4\,g^2}$ positiva est, duo singularia simulque ejusdem modi puncta exoriuntur. Restat denique, ut, si $\sqrt{\frac{a^2n^2 + ghn}{g^2}}$ i. e. radius circuli in xy aeque atque tota projectio realis est, breviter perlustremus. Qua in projectione abscissa x por-

rigetur ab $x = \frac{an}{g} - \frac{\sqrt{(a^2n^2 - ghn)}}{g^2}$ usque ad $x = \frac{an}{g} + \frac{\sqrt{a^2n^2 - ghn}}{g^2}$, quod intervallum si finibus abscissae x aequatione projectionis in xz jam designatis non contineretur, nunc etiam curva, quamvis duae projectiones reales sint, esse non posset. Singulare quoddam punctum exoriretur, si, $+ g$ posita, $\frac{an}{g} + \frac{\sqrt{a^2n^2 - ghn}}{g^2}$ et, $- g$ posita, $\frac{an}{g} - \frac{\sqrt{a^2n^2 - ghn}}{g^2} = \frac{4\,gh - f^2}{8\,ag}$ esset, quippe quod iterum cum parabolicae projectionis in xz vertice congrueret ac punctum esset, in quo corpora rotatoria se tangerent. Neque autem potest curva nostra realis esse, nisi alter de valoribus $\frac{an}{g} + \frac{\sqrt{a^2n^2 - ghn}}{g^2}$, $\frac{an}{g} + \frac{\sqrt{a^2n^2 - ghn}}{g^2}$ inter fines jacet, quos aequatio projectionis in xz abscissae x designavit. Ubi tres variae conditiones distinguendae sunt. A valor sit, qui intra illos fines, B, qui extra eos jacet. 1. A cum valore finali vertici parabolico respondente congruit. 2. A et B intra parabolicos fines jacent. 3. A et B extra eos sunt.

1. Si A cum valore finali vertici parabolico respondente congruit:

Si r aequalem radio circuli in xy, tum coordinatarum initium in vertice parabolicae projectionis (xz), denique positivam abscissarum directionem secundum axis parabolici directionem ponimus, curvae aequatio est

$$y^2 = 2\,rv - v^2$$

$$u^2 = \frac{2\,av}{g}$$

(g hic non positiva esse, positivam igitur quantitatum „n„ et „n_1„ differentiam significare potest). Hic illae § 1 de-

1*

scriptae curvae partes, quas illo loco symmetricas esse ostendimus, inter se congruentes sunt, quum neque hae aequationes, neque quae in yu ex hisce formata est: $4 a^2 y^2 = 4 agru^2 - g^2 u^4$ alias praeter pares potentias contineant, Itaque utraque de illis symmetricis partibus iterum ex duabus symmetricis constat, qnarum binae binis ita congruunt, ut illae symmetricae partes congruant.

Est igitur pars $(+u+y)+(-u+y)$ symmetrie $\backsim$ parti $(+u-y)+(-u-y)$, tum autem $(+u+y) \backsim (-u+y)$ et $(+u-y) \backsim (-u-y)$, denique $(+u+y) \cong (-u-y)$ et $(-u-y) \cong (+y-u)$ quare $(+u+y)+(-u+y) \cong (+u-y)+(-u-y)$ quin etiam $(+u+y)+(+u-y) \cong (-u+y)+(-u-y)$. Quatuor hi rami in coordinatarum initio conjunguntur, unde hoc punctum duplex nominari potest, praesertim quum. idquod infra patebit, in eo duae variae lineae tangentiales sint, duae in plano „yu„ jacentes, in axem $\pm$ u sub angulo φ, ita ut $\tan \varphi = \sqrt{\frac{gr}{a}}$ sit, inclinantur. Differentiata enim aequatione $y^2 = 2rv - v^2$, $y = v = u = o$ posita, $\frac{dy}{dv} = \infty$ erit, unde sequitur, ut tangentes initii coordinatarum in plano „yu„ jaceant. Deinde $\frac{dy}{du} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{du} = \frac{r-v}{y} \cdot \frac{gu}{a}$ est, cujus verum valorem adipiscimur, si $\frac{dy}{du} = \frac{r-v}{y} \cdot \frac{gu}{a}$ ponimus $= 2g(r-v) \cdot \frac{u}{\sqrt{4agu^2 - g^2u^4}} = \pm 2g(r-v) \frac{1}{\sqrt{4ag - g^2u^2}}$, et $y = u = v = o$ posita, $\frac{dy}{du} = \pm \frac{2gr}{\sqrt{4agr}} = \pm \sqrt{\frac{gr}{a}}$. Porro duo rami in eodem latere plani vy jacentes in uno puncto conjunguntur, ita-

quidem, ut, qnibus $+ u$ est, conjungantur, si $y = o$, $v = 2r$, $u = + \sqrt{\frac{4ar}{g}}$ et, quibus $- u$ est, si $y = o$, $v = 2r$, $u = - \sqrt{\frac{4ar}{g}}$ est. In utroque puncto, quum et $\frac{dy}{du}$ et $\frac{dy}{dv}$, y sola $= o$ facta, $= \infty$ sit, curva nostra i. e. ejus tangens planum „uv„ perpendiculariter secabit. Est igitur curva nostra prorsus in se revertens et jacet ab $v = o$ ad $v = 2r$, ab $y = -r$ ad $y = +r$, ab $u = - \sqrt{\frac{4ar}{g}}$ ad $u = + \sqrt{\frac{4ar}{g}}$. Nam $\frac{d(u^2)}{dv} = \frac{2a}{g}$ est, unde u^2 neque maximum neque minimum nancisci potest, verum, v crescente, crescit; sed quum v maximum habeat $= 2r$, u^2 etiam, hoc maximo in aequatione $u^2 = \frac{2a}{g} v$ posito, maximum nanciscitur: $u = + \sqrt{\frac{4ar}{g}}$ ac minimum: $u = - \sqrt{\frac{4ar}{g}}$, — y duplex maximum et minimum habet, quum unicuique valori y duo pares sed oppositi valores u respondeant. Est igitur maximum „u„, si $y = +r$, $v = +r$, $u = + \sqrt{\frac{2ar}{g}}$ et $y = +r$; $v = +r$, $u = - \sqrt{\frac{2ar}{g}}$, minimum, si $y = -r$, $v = +r$, $u = + \sqrt{\frac{2ar}{g}}$ et $y = -r$, $v = +r$, $u = - \sqrt{\frac{2ar}{g}}$ est. In unoquoque horum quatuor punctorum curvae linea tangens, plano uv parallela est, quia et $\frac{dy}{dv} = \frac{r - v}{g}$ et $\frac{dy}{du} = \frac{r - v}{g} \cdot \frac{gu}{a}$, $v = r$ posita, $= o$ fit. Curva nostra

quomodo formata sit, figura etiam demonstrare, inutile videtur. De curvae tangentium situ nonnulla in universum dicam: Si in universa tangentium aequatione: $y^1 - y = \frac{dy}{dv}(v^1 - v)$, $y^1 - y = \frac{dy}{du}(u^1 - u)$, $y = o$ ponimus, ejus puncti, in quo planum uv secat, coordinatas invenimus $v^1 = \frac{rv}{v-r}$, $u^1 = \frac{av^2}{gu(v-r)}$ tang φ (i. e. anguli inclinatorii, quem linea tangens et planum „uv„ includunt) $= \frac{gu(v-r)}{y\sqrt{a^2 + 2agr}}$

Si curvae nostrae curvaturam invenire volumus, ut ea reversionis puncta exquiramus, quae curva haud dubie in prima et secunda curvatura habet, hoc ita est faciendum: Primum aequatio superficiei, curvae tangentibus formatae inveniatur, qua tum etiam puncti disquirendi curvaturam, atque, quam secundam dicunt, curvae curvaturam adipisceris; (superfities, quum devolvi possit, unius tantum curvaturae est). Tum superficies tangentialis superficiei tangentibus formatae inveniatur, unde curvae. planum osculatorum habemus; deinde ex tangentis supra commemorata aequatione normalis plani aeque atque sectionis duarum se sequentium planorum normalium aequatio derivetur, quo facto illud punctum inveniemus, in quo haec sectio planum osculatorium secat: et hujus atque illius curvae puncti distantia ille, quem quaerimus, primae curvaturae radius est. Itaque, ut puncta reversionis inveniamus, disquirendum est, ubi aequatio radii curvatorii signum commutet, quare = o ponenda est. Sed quum aequationum, quia nimii ordinis sunt, disquisitione longius aberraremus praetermittenda esse vidétur.

2. A et B intra fines parabolae jacent. Positiva differentia valoris finalis A ejusque, qui parabolico vertici respondet, sit = d, quo facto aequatio curvae erit:

$$u^2 = \frac{2\,av}{g}$$

$$y^2 = 2r\,(v - d) - (v - d)^2$$

Hic sicuti antea ex quatuor symmetricis partibus, quarum binae binis congruunt, neque autem conjunctae sunt, curva constat. Pars enim ea, quae $+ u$ habet, cum ea, cui $- u$ est, conjuncta esse non potest, quia u^2 non $= o$ fit, verum minimo valori $v = + d$, minimus $u^2 = \frac{2 ad}{g}$, ac maximo valori $v = d + 2r$ maximus valor $u^2 = \frac{2 ad}{g} + \frac{4 ar}{g}$ respondet. Sunt igitur huic curvae duo maxima, duoque minima „u„, quorum punctorum in unoquoque $y = o$ est, quare curvae partes, quae, quod ad $\pm y$ attinet, symmetricae sunt, in iis se conjungunt, atque lineae tangentiales in plano uv perpendiculares sunt, quum $\frac{dy}{du}$ et $\frac{dy}{dv} = \infty$ reddatur, y in eorum aequatione $= o$ posita. Denique in utraque partium disjunctarum ac congruentium maximum et minimum y est; nam aequatione $y^2 = 2r(v - d) - (v - d)^2$ differentiata, et $\frac{dy}{dv} = 2r - 2(v - d)$ posita $= o$, $v = r + d$ et $y = \pm r$ invenitur. Hisce maximis et minimis linea tangens plano uv parallela respondet, quum $\frac{dy}{du}$ et $\frac{dy}{dv} = o$ sint. Curva, quae sit, projectionis in uv figura facile ostendi potest.

3. Si A et B extra fines parabolicos jacent. Aequationes curvae erunt:

$$u^2 = \frac{2 av}{g}$$

$$y^2 = 2r(v + d) - (v + d)^2$$

ubi d positiva quantitas, sed $< 2r$ i. e. minor radio circuli esse debet. Tres conditiones, si $d <_1$ aut $=_1$ aut $> r$ est, hic distinguendae, sed brevitatis causa conjunctim disquirendae sunt. Curva ex quatuor symmetricis et inter se conjunctis partibus constat, quanquam commmuni conjunctionis puncto carent; nam, etsi u et $y = o$ reddi

possunt, non simul possunt. Quum „u„ una cum „v„ crescat, minimo valori $v = o$ minimus valor $u = o$, sicuti maximo $v = 2r - d$, maximus valor $u^2 = \frac{4\,ar}{g} - \frac{2\,ad}{g}$ respondet. In punctis $v = 2r - d$, $u = + \sqrt{\frac{4ar - 2ad}{g}}$ et $v = 2r - d$, $u = - \sqrt{\frac{4ar - 2ad}{g}}$ $y = o$ est, cnrva planum uv perdendiculariter secat et in utroque eorum duae (quod attinet ad $\pm$ y) symmetricae partes se conjungunt. Aequatione $y^2 = 2r(v + d) - (v + d)^2$ differentiata, $\frac{d\,(y^2)}{dv} = 2r - 2(v + d)$ est, quare valori $v = (r - d)$ maximum $y^2 = r^2$ respondet. Si $d > r$ esset, $v = (r - d)$ posita, u imaginaria redderetur neque illud maximum y permitteretur. Sed quum $y^2 av = (r - d)$ usque ad $v = (2r - d)$ semper decrescat usque ad $y = o$, minimo valori $v = o$ maximus valor y^2, huic deinde minimum y infra idem punctum respondebit. In neutro horum punctorum tangens plano uv parallela est, quum $\frac{dy}{dv}$ non $= o$ reddatur. Si $d = r$ seu $(r - d) = o$ est, in maximo huic valori respondente tangens plano uv parallela est. Denique si $d > r$ ponimus, valori $v = r - d$ eodem modo quidem maximum $y^2 = r^2$ atque tangens uv parallela respondet, verum si $v = o$ est, etiam relativum, quod dicunt, minimum y^2 erit; namquum a $v = r - d$ usque ad $v = - d$ valor y^2 continuo decrescat, debet etiam, si valor v quam minimus est $(= o)$ minimum fieri, neque autem tangens ibi plano „uv„ parallela est, quum $\frac{dy}{dv} = o$ non sit. Curva igitur duos ad varia plani uv latera jacentes ac symmetricos vertices formabit. Totius curvae figuram facile est demonstrare.

Antequam ad sequentem paragraphum, in qua eam rei conditionem, si $g = o$ est, disquisituri sumus, progre-

diamur, necesse erit commemorare, $fn - gm = o$ una cum $h = o$ esse posse, sed, quum omnes varias conditiones, si $fn - gm = o$ est, jam perlustraverimus, illud etiam non praetermissum erit, quapropter hic praetermittere licet.

§. 3.

Secundam conditionem in introductione hanc posuimus si $h = o$ est; quapropter hoc pacto curvae nostrae aequatio est I $2\,ax = fz + gz^2$

$$\text{II}\ 4\,a^2\,y^2 = 4\,a^2\,mz + (4\,a^2n - f^2)\,z^2 - 2\,fg\,z^3 - g^2\,z^4$$

Quum positivam ordinatae z directionem ita ponere possimus, ut, etiamsi m non positiva sit, eo tamen positiva fiat, m semper positiva ponenda est. Projectio curvae in xz parabola est, cujus forma, quae sit, videas §. 1. Semper per initium coordinatarum permeat, et cuique valori z realis valor x respondet. Quapropter curva semper admittitur, ita quidem, ut intra fines, quos aequatio II quantitati z et hac etiam quantitatibus y et x designat, jaceat Neque autem hi fines solum varii esse possunt, verum etiam tota curvae forma, prout aequatio

$$4\,a^2\,m + (4\,a^2\,n - f^2)\,z - 2\,fg.\,z^2 - g^2z^3 = o \quad \text{III}$$

unam realem, aut tres pares, aut tres reales quarum duas pares aut tres reales easque omnes impares radices habet.

I. Aequatio III uuam tantum realem radicem habet. Ut membrum secundum hujus aequationis evanescat, $z = y - \frac{2\,f}{3\,g}$ ponenda est; quo facto aequatio nostra commutatur in

$$y^3 - \left\{\frac{f^2 + 12\,a^2n}{3\,g^2}\right\} y + \frac{72\,a^2\,nf - 2\,f^3 - 108\,a^2\,mg}{2\,fg^2} = o$$

Haec si ita sunt $((m\,g - nf)\,(f^3 - 8\,a^2\,nf + 27\,a^2\,mg) - a^2n\,(fgm + 16\,a^2n))$ positiva quantitas esse debet, quum hoc pacto tantum irreductibilis legis Cardanicae con-

ditio admittatur. Posita $\frac{f^2 + 12\, a^2\, n}{3\, g^2} = p$; $\frac{72\, a^2nf - 2\, f^3 - 108\, a^2mg}{27\, g^3} = q$, unica realis radix erit

$$\sqrt[3]{\left\{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right\}} + \sqrt[3]{\left\{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right\}},$$

quae etiam, quum m positiva posita sit, positiva esse debet. Nam

$4\, a^2\, m + (4\, a^2n - f^2)\, z - 2\, fgz^2 - g^2z^3$ —, si $z = -\infty$, $= +\infty$, si $z = 0$, $= +$, si $z = +\infty$, $= -\infty$ ..... redditur, eamque ipsam ob causam uni tantum radici valor $= 0$ aequationis III respondet. Curva, hac radice $= A$ posita, non nisi intra fines a $z = 0$ usque ad $z = A$ erit, quum, aliis valoribus z positis, $4\, a^2y^2$ imaginaria fieret. Est enim $4\, a^2y^2 = K = 4\, a^2mz + (4\, a^2n - f^2)\, z^2 - 2\, fgz^3 - g^2z^4$, $z = -\infty$, posita, $= -\infty$, et quoniam tum demum, quum $z = 0$ ponitur, $K = 0$ est, negativae z negativa K eamque ob causam imaginaria y respondebit. Sed quum, si $z = 0$ ponimus, $\frac{dK}{dz}$ positiva sit, in eo puncto, cui $z = 0$ respondet, K ex negativo in positivum, deinde, si $z = A$ est, iterum in negativum transit, quum huic uni valori z $K = 0$ respondeat, et si $z = +\infty$, $K = -\infty$ sit. In hoc puncto $\frac{dK}{dz}$, y decrescente, necessario negativa esse debet, $\frac{dy}{dz}$ si $z = 0$ et $= A$ est, $= \infty$ erit. Sunt autem hic duae conditiones distinguendae: 1. Si f et g eadem signa habent vertex parabolicae projectionis in negativo latere z jacet, quapropter punctum, quod dicunt, projectum curvae non est, quippe quae tantum intra fines $z = 0$ et $z = A$ sit. His valoribus finalibus etiam valores finales x respondere debent. Nam quum $\frac{dx}{dz} = \frac{f + 2\, gz}{2\, a}$ sit, x. si f et g positivae quantitates sunt, z crescente, semper crescit, ita quidem ut minimo valori z ($= 0$) minimus valor $x = 0$, ac maximo $z = A$ maximus valor $x = \frac{fA + gA^2}{2\, a}$ res-

pondeat. Sed si f et g negativae sunt, $\frac{dx}{dz}$ ab $z = o$ ad $z = A$ negativa erit, ita ut minimo $z = o$, quum x semper decrescat, maximum $x = o$, et maximo $z = A$ minimum $x = \frac{fA + gA^2}{2a}$ respondeat atque negativae x solum permittantur. Restat, ut maxima et minima y disquiramus: Quum $\frac{dK}{dz} = 4a^2m \ldots - 4g^2z^3$ intra $z = o$, et $z = A$, ∞ fieri non possit, et si $z = o$, positiva, si $z = A$ est, negativa reddatur, $\frac{dK}{dz}$ intra $z = o$ et $z = A$ haud dubie $= o$ fieri debet, idque semel tantum, quum aequatio $4a^2m \ldots\ldots - 4g^2z^3$ unam tantum signorum vicissitudinem habeat. Uni igitur tantummodo positivo valori z, $\frac{dK}{dz} = o$ respondet, quapropter curva unum minimum unumque maximum y habet; $z = B$ posita (B una illa positiva aequationis $\frac{dK}{dx}$ radix et $< A$ est,)

$$x = \frac{fB + gB^2}{2a}$$

$$y = +\frac{\sqrt{(4a^2m + (4a^2n - f^2)B - 2fgB - g^2B^3)B}}{2a}$$

$y = -\frac{\sqrt{(\ \ )}}{2a}$. Curva ex duabus (quod ad $\pm$ y attinet symmetricis inter se conjunctis partibus constat, atque abscissarum planum xz et in coordinatarum initio et, si $z = A$, $x = \frac{fA + gA^2}{2a}$ est, secat, qui plano in maximo et minimo y tangens parallela est. — 2. Si f et g diversa signa habent, vertex parabolicae projectionis in positivo latere z jacet, est autem tum demum punctum curvae projectum, si $\frac{-f}{2g} \overline{\overline{<}} A$ est; si $\frac{-f}{2g} \overline{\overline{>}}$ Apo-

nimus, valoribus finalibus x $\left\{ x = 0,\ x = \frac{fA + gA^2}{2a} \right\}$ valores finales z respondere debent, quum $\frac{dx}{dz} = \frac{f + 2gz}{2a}$ a $z = 0$ usque ad $z = A$ idem atque quod f, signum habeat. Est enim verbi causa, si $\frac{-f}{2g} = A$ ponimus, ipse parabolicae projectionis vertex, quod ad x et z attinet, externum curvae punctum. Sed si $\frac{-f}{2g} < A$ ponitur, $\frac{dx}{dz}$ intra $z = 0$, et $z = A$ signum, si $z = \frac{-f}{2g}$ est, commutabit, ita ut positivae f, vi $z = \frac{-f}{2g}$ est, maximum, quod dicunt, absolutum abscissae x respondeat, hinc continuo decrescat, etiam si $A = \frac{-f}{2g}$ sit, iterum $= 0$, quin etiam, si $A > \frac{-f}{g}$ negativa si $z = A$, iterum minimum reddatur. Curva hic, ut supra, ex duabus symmetricis conjunctis partibus constat et abscissarum planum bis perpendiculariter secat. Eadem, quae supra maxima et minima sunt, si quidem z intra $z = 0$ et $z = A$ unam tantummodo positivam radicem habet. Sed si aequatio $4a^2m + 2(4a^2n - f^2)z - 6fgz^2 - 4g^2z^3 = 0$ plures positivas radices inter illos fines jacentes habet, simul tres esse debent, quum illa aequatio aut unam, aut tres signorum vicissitudines praebeat, quia $-6fg$ positiva est. Quibus conditionibus aequatio tres positivas radices habeat, facile demonstrari potest, quapropter brevitatis causa praetermittitur. Si ponimus, ut duae positivae radices intra $z = 0$ et $z = A$ sint, tertia etiam, quum realis sit, positiva esse debet. Est autem si $z = A$ ponimus, $\frac{dK}{dz}$ negativa et $= -\infty$, si $z = +\infty$ est. Sed

illi radici $\frac{dK}{dz} = o$ responderet, quod non esset, nisi intra $z = A$ et $z = + \infty$ duae pares radices ponerentur, quod poni non licet. Si ponimus, ut tres reales radices inter $z = o$ et $z = A$ aequatio $\frac{dK}{dz}$ praebeat, hae radices pares esse possunt. Quodsi est, unum maximum y, ut supra, habebimus, si duae pares sunt, tertiae maximum y respondet, si autem omnés tres impares sunt, duabus illis, quae valoribus $z = o$ et $z = A$ appropinquant, duo maxima, tertiae minimum y,[2] quod dicunt, relativum respondet. Si maxima haec imparia sunt, minimum eorum relativum maximum est.

II. Si aequatio: $4 a^2m + (4 a^2n - f^2) z - 2 fgz^2 - g^2z^3 = o$ tres reales easque pares radices habet, omnes positivae $= \frac{-2 f}{3 g}$ sunt, quum, si aequatio illa tres pares radices habet, conditiones, quae sequuntur, non esse non possint: $f^2 - 4 a^2n = o$, $9 gm = 8 nf$; quapropter „n„ negativa est, sicuti f et g diversa signa habent. Debet igitur in hac conditione sex aequationibus responderi, quibus facile ostendi potest, corporum ratatoriorum utrumque ellipsoideum non esse debere, verum etiam, quum n negativa, n, autem positiva sit alterum ellipsoideum, alterum contra paraboloideum aut hyperboloideum esse posse. — Si $4 a^2y^2 = g^2z (A - z)^3$ ponimus, curva tantum intra fines $z = o$ et $z = A$ erit, quum y, si hos fines egrederemur, imaginaria fieret; intra eos positiva est. Itaque parabolicae projectionis in xz vertex revera projectum curvae punctum erit, quum ejus abscissa $= \frac{-f}{2 g} = \frac{3}{4} A$ sit. Si ponimus, ut f negativa quantitas sit, x ab $z = o$ usque ad $z = \frac{3}{4} A$ semper negative crescit, et si $z = \frac{3}{4} A$, maximum negativum valorem habet $= \frac{-f^2}{8 a g}$, minimum ergo. Hinc z crescente, negative diminuitur, donec, si $z = A$ ponitur, relativum maximum

nanciscatur, $x = \frac{fA + gA^2}{2a}$ Quum K ab $z = o$ usque ad $z = A$ positiva sit, y in hoc intervallo maximum necessario habebit quod ut inveniamus, $\frac{dK}{dz} = o$ ponenda est. Quo facto $z = A$ et $z = \frac{1}{4}A$ habemus, sed quum, si $z = A$ est, K ex positivo in negativum transeat, tantum valori $z = \frac{1}{4}A = \frac{-f}{6g}$ maximum $y = \frac{+f^2\sqrt{3}}{24g}$ minimum $y = \frac{-f^2\sqrt{3}}{24g}$ respondet. Denique curvae tangens, si $z = o$ est, planum xz perpendiculariter secat, quum et $\frac{dy}{dz} = g\frac{(A - 4z)\sqrt{(A - z)}}{4a\sqrt{z}}$ et $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}$ $\frac{dz}{dx}$ hoc pacto $= o$ reddantur. Si $z = A$ in his aequationibus ponimus, $\frac{dy}{dz} = o$, $\frac{dx}{dz} = \frac{-f}{6a}$ erit, et tangens in plano xz jacens, axem x sub angulo, cujus tangens $= \frac{-f}{2a}$ secat. Si f positiva est, res pariter se habet, sed verticis parabolici ordinata positiva est. Hoc figura facile ostendi potest.

III. Si illa aequatio tres reales, quarum duae pares sunt, radices habet, $= g^2(z - A)^2(B - z) = o$ erit: quae res esse non potest, quin hisce aequationibus respondeatur: $(mg - nf)(f^3 - 8a^2nf + 27a^2mg) = a^2n$ $(fgm + 16a^2n^2)$ (Egen Alg.); quo pacto

$$A = -\frac{(f(f^2 - 4a^2n) + 18a^2mg),}{g(f^2 + 12a^2n)}$$

$$B = \frac{4a^2(9gm - 8fn)}{g(f^2 + 12a^2n)}$$

est. Quum aequatio illa aut unam aut tres signorum vicissitudines habeat, aut unam aut tres positivas radices

habebit. B nunquam negativa erit, quia hoc pacto quantitati z impar positivorum valorum numerus non esset.

1. Si A negativa ponitur, $4a^2y^2$ non nisi intra fines $z = o$ et $z = B$ positiva manet; nam si z major etiam negative, quam quantitas A redderetur, y negativa fieret; est quidem, si $z = A$ ponitur, iterum $= o$, mox autem hinc in negativum revertitur, quum $z = A$, $\frac{dK}{dz} = o$ et $\frac{d^2K}{dz^2} = 2\,gA\,(B - A)$, negativus valor, respondeat. Si $z = o$ ponitur, K ex negativo in positivum transit, quum $\frac{dK}{dz} = g^2A^2B$ sit, positiva manet, usque ad $z = B$, ubi in perpetuum in negativum transgreditur. Est autem ut facile intelligitur, ubi $z = A$, $y = o$, $x = \frac{fA + gA^2}{2\,a}$, curvae nostrae punctum conjugatum ita ortum, ut corpora procreantia, quae alibi se secant, hic se tangant. Analysin curvae huic conditioni respondentem, quia eadem est quae disquisitio conditionis I.$_1$ praetermittere liceat.

2. Atque ita fere res se habet, si A positiva majorque quam B est. Curva intra fines $z = o$ et $z = B$ est (vid. cond. I.); valori $z = A$ punctum, in quo corpora rotantia tanguntur, respondet; ubi $z = o$ est, ex negativo in positivum tum, si $z = B$ est, in negativum revertitur, ubi manens, si $z = A$ est, $= o$ quidem redditur, statim tamen in negativum descendit. Maximum y, hac conditione posita, facilius invenir potest, quo ab illa conditione I differt.

3. Sin autem A positiva minorqne quam B est, curva intra $z = o$ et $z = B$ jacet; K, si $z = o$, ex negativo in positivum transit, tum, si $z = A$ est, denuo $= o$ redditur, tum autem positiva manet usque ad $z = B$, quo ex loco semper negativa est; nam $\frac{dK}{dz}$, si $z = o$, positiva, si $z = A$, $= o$, si $z = B$ ponimus, negativa est. Maximum ac minimum y facile invenitur.

Nam si $\frac{dK}{dz} = o$ ponitur,

$$z = \frac{(3\,B + 2\,A) - \sqrt{(9\,B^2 - 4\,AB + 4\,A^2)}}{8},$$

$$z = A,\ z = \frac{(3\,B + 2\,A) + \sqrt{(9\,B^2 - 4\,AB + 4\,A^2)}}{8}$$

invenimus, quorum valorum primus inter $z = o$ et $z = A$, tertius inter A et B esse debet; quod perspicuum. Ex coordinatarum initio curva perpendiculariter surgit, ascendit, z crescente, donec $z = \frac{(3\,B + 2\,A) - \sqrt{(-)}}{8}$ sit, unde descendit, z semper crescente, donec, $z = A$ posita, relativum maximum y efficiat. Hic pars curvae supra xz jacens et ea, quae infra hoc planum est, duplicem verticem format, simulque duplex punctum formatur, quum ei duae tangentes respondeant. Nam in aequatione $\frac{dy}{dx} = \frac{g\,(z - A)\,(B - 2\,z) + 2\,z\,(B - z)}{4\,a^2 \sqrt{z}\,\sqrt{B - z}}$, $z = A$ posita, haec aequatio mutatur in hanc $\frac{dy}{dz} = \frac{\pm g \sqrt{A\,(B - A)}}{2a^2}$

Tangentes igitur huic puncto respondentes, in abscissarum planum inclinantur, quum etiam $\frac{dx}{dz}$ et $\frac{dy}{dx}$ hic valores certos habeant. Hinc curva denuo ascendens in eo puncto, in quo $z = \frac{(3\,B + 2\,A) + \sqrt{(-)}}{8}$ est, secundum maximum y habet, tum descendit usque ad punctum, cui $z = B$ respondet, ubi planum xz perpendiculariter secat et infra hoc partem primae parti symmetricam formans, in puncto, in quo $z = o$, cum ea conjungitur, postquam duo minima, si $z = \frac{(3\,B + 2\,A) + \sqrt{(-)}}{8}$ et =

$\frac{(3B + 2A) - \sqrt{(-)}}{8}$, unumque relativum maximum formavit, si $z = A$ et $y = o$ est. De maximis et minimis x pauca restat, ut dicam. Quum aequationis nostrae radices omnes positivae sint eaque igitur tres signorum vicissitudines habeat, f et g opposita signa habere necesse erit, quare parabolicae projectionis vertex in positivo latere z jacet et maxima aeque ac minima x et z eodem modo inveniuntur eademque sunt, quae in condit. I.

IV. Si aequatio tres reales et impares radices habet, lex cardanica irreductibilem conditionem praebet, quamsi praebet, $((mg - nf)(f^3 - 8a^2nf + 27a_4^2mg) - a^2n(fgm + 16a^2n^2))$, quantitas, quae sub signo radicali secundi ordinis est, negativa esse debet. Aequatio $4a^2m + (4a^2n - f^2)z - 2fgz^2 - g^2z^3 = o$, quum, ut notum est, aut unam aut tres signorum vicissitudines praebeat, aut duas negativas unamque positivam aut tres positivas radices habebit. Positivo, aut, si omnes tres positivi sunt, minimo valore $z = A$ posito, ceteris $= B$ et C, ita ut $(B - C)$ positiva sit, positis, aequatio $4a^2y_4^2 = -g^2z(z - A)(z - B)(z - C)$ et $\frac{dK}{dz} = -g^2(z - A)(z - B)(z - C) - g^2z(z - B)(z - C) - g^2z(z - A)(z - C) - g^2z(z - A)(z - B)$ erit Unde sequitur, ut, si $z = o$ ponitur, $\frac{dK}{dz} = g^2ABC$, ergo $=$ positiva sit. Si $z - A$ est, $\frac{dK}{dz} = - g^2A(A - B)(A - C) = - g^2A(B - A)(C - A)$, ergo negativa erit, quum $(C - A)(B - A)$ positiva sit. Si $z = B$ est, $\frac{dK}{dz} = - g^2B(B - A)(B - C)$, ergo positiva erit; denique si $z = C$ ponimus, $\frac{dK}{dz} = + g^2(B - C)\ C\ (C - A)$, igitur negativa erit. Quare sequitnr, ut, B et C positivis sive negativis positis quantitatibus, K, si $z = o$ est, ex negativo in positivum trauseat, si $z = A$ est,

iterum in negativum revertatur, denuo, si $z = B$ est, in positivum transgressa, si $z = C$ est, in negativum transeat. Quam ob rem curva ex duabus disjunctis partibus constat, et aequatio $\frac{dK}{dz} = o = 4\,a^2m + (8a^2n - f^2)\,z - 6\,fgz^2 - 4\,g^2z^3$, quum K et inter $z = o$ atque $= A$, et inter $z = B$ ac $z = C$, maximum, praeterea, prout B, C positivae aut negativae sunt, inter $z = A$ et $z = B$ aut inter $z = C$ et $z = o$ minimum nanciscatur, tres reales valores z praebebit. Soluta igitur hac aequatione et valore z, qui inter „o„ et A jacet, D, qui inter B et C, E nominato maxima ac minima curvae nostrae data sunt. Utrique enim de partibus curvae disjunctis unum maximum et minimum erit. Si $z = o$ est, curva perpendiculariter supra planum xz surgit, y crescit, z crescente usque ad $z = D$, ubi maximum

$$y = +\sqrt[4]{\left\{\frac{4\,a^2m\,D + \ldots\ldots - g^2D^4}{4\,a^2}\right\}}$$

nanciscitur, tum decrescit, usque ad $z = A$, ubi, $y = o$ facta, curva planum xz perpendiculariter secat, atque infra hoc planum ad coordinatarum initium symmetrice revertitur, postquam y infra illud punctum, in quo $z = D$ fuit. minimum $y = -\sqrt{\left\{\frac{4\,a^2m\,D\ \ldots\ldots - g^2D^4}{4\,a^2}\right\}}$ habuit. Secunda etiam pars inter $z = B$ et $z = C$ jacens planum xz in hisce punctis perpendiculariter secat, ex duabus symmetricis partibus constat. Tangens in eo puncto, cui $z = E$ respondet, infra et supra planum xz huic plano parallela est, quum y hic maximum

$$+\sqrt{\left\{\frac{4\,a^2m\,E\ \ldots\ldots - g^2\,E^4}{4\,a^2}\right\}}$$ et minimum

$$-\sqrt{\left\{\frac{4\,a^2m\,E\ \ldots\ldots - g^2\,E^4}{4\,a^2}\right\}}$$ nanciscatur. Quomodo ordinata x in ea parte, quae inter $z = o$, et $z = a$ jacet, crescat ac decrescat, quae maxima et minima, in

universum, qui ejus valores finales sint, de ea re vide cond: I. In ea parte, quae inter $z = B$ et $z = C$ est, item fere res se habet. Quantitas $\frac{dx}{dz} = \frac{f + 2\, gz}{2\, a}$, semel tantum $= o$ fieri, semelque igitur signum commutare potest, commutat autem. si $z = \frac{-f}{2\, g}$. Itaque si $\frac{-f}{2\, g}$ inter $z = B$ et $z = C$ aut non jacet aut cum altero eorum congruit, $\frac{dx}{dz}$ intra $z = B$ et $z = C$ signum suum servat. Quod si positivum est, x ab $z = B$ ad $z = C$ semper crescit, si negativum decrescit, semperque valores finales x cum valoribus finalibus z (B et C) congruunt. Sed si $\frac{-f}{2\, g}$ intra B et C jacet, duae conditiones distinguendae sunt: 1., Si g negativa est, $\frac{dx}{dz}$, si $z = \frac{-f}{2\, g}$ ponitur, ex positivo in negativum transit, x igitur ab $z = B$ usque ad $z = \frac{-f}{2\, g}$ crescit et in hoc puncto maximum habet, hinc denique usque ad $z = C$ decrescit, ubi minimum nanciscitur. Si valor $z = \frac{-f}{g}$ inter B et C jacet, x etiam $= o$ fieri potest. 2., Si g positiva est, $\frac{dx}{dz}$ si $z = \frac{-f}{2\, g}$ ponimus, ex negativo in positivum transit, et x ab $z = B$ ad $z = \frac{-f}{2\, g}$ decrescit, ubi minimum habet, tum ab hoc puncto usque ad $z = C$ crescit, hic igitur maximum nanciscitur. In puncto, cui $z = \frac{-f}{2\, g}$ respondet tangens plano yz parallela est.

§. 4.

Restat, ut de conditionibus, si $h = o$ et $m = o$ sunt, dicamus. Quod si ita est, primum corpus rotatorium duplex conus directus est. Positiva directio abscissae z hic nobis definienda erit. Si $m = o$ est, f (vide introd:) $= -m, + 2n$, b et $g = n - n$, erit atque quum et m, et b signa commutare debeant, positiva directione z in negativam commutata, n, et n autem non commutent, positiva directio z ita ponenda erit, ut $\frac{f}{g}$ positiva sit. Parabolicae projectionis aequatio eandem atque in §. 3 formam, projectionis autem in plano yz hancce habebit.

$$K = 4a^2y^2 = -g^2z^2 \left\{\frac{f^2 - 4a^2n + 2fgz + z^2}{g^2}\right\} 2.$$

n hic positiva ponenda est, quum si negativa esset, $x^2 + y^2 = nz^2$ primi corporis rotatorii aequatio imaginaria fieret. Aequationis $-g^2z^2 \left\{\frac{f^2 - 4a^2n + 2fgz + z^2}{g^2}\right\}$ $= o$ seu $z^2 + 2fgz = \frac{4a^2n - f^2}{g\,2}$ radices igitur erunt $z = \frac{-f \pm 2a\sqrt{n}}{g}$, utraque positiva aut negativa aut contrariorum signorum. 1., Si ambo valores simul positivi aut negativi sunt (si $f^2 > 4a^2n$ est) curva tantum inter $z = A$ et $z = B$ et initium coordinatarum singulare curvae punctum erit, in quo corpora rotantia se tangunt. Si $z = A$ et $z = B$ est, curva planum xz perpendiculariter secabit, atque intra illos valores maximum ubi $z = C$ est, nanciscetur, quod ut inveniamus $\frac{dK}{dz} = o$ ponenda est ($z = o$ praetermissa)

et $z = 3\frac{(A + B) \pm \sqrt{(9A^2 - 14AB + 9B_2)}}{8}$ invenitur. Quamvis uterque horum valorum realis sit, alter tamen, quem C nominavimus, inter A et B tantum jace-

bit: si $z = -\frac{f}{g}$ (qui valor necessario inter A et B erit) est, $x = o$ redditur. Maxima et minima ab iis, quae supra disquisita sunt, non differunt, quum aequatio parabolae huic conditioni respondens ab illa non differat. 2., Si aequationis 2, radices diversa signa habent (vi $f^2 < 4a^2n$ est), negativa radice $= A$, positiva $= B$ posita, curva inter A et B erit. In coordinatarum initio, hic tanquam duplice vertice, quatuor curvae rami se conjungunt. Curva inter $z = o$ ad $z = A$ et $z = o$ ad $z = B$ maximum y habebit et in universum ejusdem formae erit, cujus ea, quae (III cond. 3) jam descripta est. Quare ejus analysis praetermittenda videtur. Denique si $f^2 - 4a^2n = o$ est, hisce aequationibus respondendum erit:

$$a^2 = \frac{m_1^2}{4(n-n_1)};\; f^2 = \frac{nm_1^2}{n-n_1};\; g = n - n_1\; b = \frac{f + m_1}{2n^1};$$ unde

g positiva esse debet, ideoque etiam f, quum $\frac{f}{g}$ positiva esse debeat. Curvae aequatio igitur erit: $x = \frac{fz + gz^2}{2a}$,

$K = 4a^2y^2 = -g^2z^3\left(\frac{2f}{g} + z\right)$. Si $z = \frac{-f}{g}$ et $= o$ ponitur, $K = o$ est, in puncto, cui $z = \frac{-f}{2g}$ respondet ex negativo in positivum, si $z = o$ est, in negativum iterum transgreditur. Quare curva non nisi his finibus continetur, $\frac{dK}{dz} = o$ posita, z ($z = o$ omissa) $= \frac{-3f}{2g}$ invenitur, unde sequitur, ut y ab $z = \frac{-2f}{g}$, z crescente crescat usque ad $z = -\frac{3f}{2g}$, ubi maximum

$y = \frac{\pm 3f^2\sqrt{\frac{3}{2}}}{4ag}$ nanciscitur, hinc continuo usque ad initium coordinatarum decrescat, $\frac{dy}{dz} =$

$\frac{-g(4z+6f)\sqrt{-\frac{z}{g}}}{4a\sqrt{\frac{2f+z}{g}}}$ est, tangens igitur, si $z = \frac{-3f}{2g}$, ponitur, quum hoc pacto $\frac{dy}{dz} = o$ sit, plano xz parallela erit, si $z = \frac{-f}{g}$ ponimus, hoc plauum perpendiculariter secabit, cui inest in coordinatarum tanquam curvae initio, ubi axem z (quum $\frac{dx}{dz}$ hoc pacto $= \frac{f}{2a}$) sub angulo, cujus $tg = \frac{\sqrt{f}}{2a}$ secat. Deinde ex $\frac{dx}{dz} = \frac{f+2gz}{2a}$ sequitur, ut x ab $z = \frac{-2f}{g}$ incipiens, z crescente, decrescat, quare $x = -\frac{f^2}{ag}$ valori $z = \frac{-2f}{g}$ respondens maximum est. Si $z = \frac{-f}{2g}$ redditur, $\frac{dx}{dz}$ signum commutat atque x minimum vertici parabolicae projectionis respondens $= \frac{-f^2_3}{8ag}$ (postquam, $z = \frac{-f}{g}$ posita, $= o$ facta est) nanciscitur. Hinc continuo crescit, donec in coordinatarum initio iterum $= o$ fiat ibique igitur relativum maximum habet.

§. 5.

Conditionibus autem, quae permitti poterant, satis jam ut nobis videtur, supra disquisitis ad universas curvae nostrae aequationes: $2ax = h + fz + gz^2$
$4a^2y^2 = -h^2 + (4a^2m - 2fh)z + (4a^2n - f^2 - 2gh)z^2 - 2fgz^3 - g^2z^4$ revertemur. Cujus ultimae, si eam $= o$ ponimus, (quo facto hanc formam habebit:

$$z^4 + \frac{2fz^3}{g} - \frac{(4\,a^2n - f^2 - 2\,gh)}{g^2}z^2 - \frac{(4\,a^2m - 2fh)}{g^2}z + \frac{h^2}{g^2} = o)$$ radices imprimis inveniendae sunt, quum, quanti momenti aequationis $4\,a^2y^2 = o$ radices sint, ex superioribus jam pateat. Ut hujus aequationis membrum secundum evanescat, $z = y - x$ ponatur, quo facto nova aequatio ita incipit: $z^4 = y^4 - 4y^3x + 6y^2x^2 - 4yx^3 + x^4$

$$\frac{2f}{g}z^3 = \frac{2f}{g}{}^3 \text{ cet.}$$

quapropter, ut illud secundum membrum evanescat, $z = y - \frac{f}{2g}$ ponenda est. Quo valore substituto, aequatio nostra commutatur in $y^4 + \frac{(2\,gh - 4\,a^2n - f^2)}{2}y^2$

$$+ (4\,a^2nf - 4\,a^2\,gm)\,y + (\frac{f^4}{16} - \frac{f^2gh}{2} - a^2f^2n +$$

$2\,a^2mfg + g^2h^2) = o.$

Si quadratum summae duorum valorum $y = M$ ponimus, ex illa aequatione (vid. Egen §. 373.) haec derivatur $M^3 + (4\,gh - f^2 - 8\,a^2n)\ M^2 + 8\,a^2\ (2\,a^2n^2 - 2\,ghn + f^2n - mfg)\ M - 16\,a^4\,(nf - mg)^2 = o$, (2)

Hic octo diversae conditiones distinguntur. I. Si M tres radices $= o$ habet, $(4\,gh - f^2 - 8\,a^2n) = o$, $(16\,a^4n^2 - 16\,a^2ghn + 8\,a^2f^2n - 8\,a^2mfg) = o$, denique $16\,a^4nf + 16\,a^4mg = o$ esse et y quatuor radices $= o$, z autem quatuor reales easque pares $= -\frac{f}{2\,g}$ habere necesse est. Haec conditio jam (§. 2 initio) considerata est. Corpora rotatoria tantum in plano xz se tangunt, ita quidem, ut vertex parabolicae projectionis singulare curvae punctum sit.

II. Si M tres pares ac positivas radices habet $(f^2 + 8\,a^2n - 4\,gh)^2 = 24\,a^2\,(2\,a^2n - 2\,ghn + f^2n - mfg)$ et $(f^2 + 8\,a^2n - 4\,gh)^3 = 27.16\,a^4\,(nf - mg)^2$ (Egen

§. 362) est; y tres pares valores $= \frac{6\,a^2\,(nf - mg)}{f^2 + 8a^2n - 4\,gh}$ habet, quartus est $= \frac{18\,a^2\,(mg - nf)}{(f^2 + 8\,a^2n - 4gh)}$, quapropter tres pares valores $z = \frac{4\,a^2fn - 12\,a^2gm - f^3 + 4\,fgh}{2\,g\,(f^2 + 8\,a^2n - 4\,gh)}$ sunt, quartus $= \frac{36\,a^2gm - 44\,a^2fn - f^3 + 4\,fgh.}{2\,g\,(f^2 + 8a^2n - 4\,gh)}$

Si pares valores A, imparem B nominamus, $(B - A) = \frac{4\,a\,\sqrt[3]{(gm - fn)}}{g\,\sqrt[3]{2\,a}}$ invenitur, unde sequitur, ut $B - A$ positiva aut negativa sit, prout $gm - fn$ et g idem aut contraria signa habent. 1., Si $B - A$ positiva est, K inter $x = -\infty$ et $z = A$ negativa est, si $z = A$ ponimus, in positivum transit, quum hoc pacto $\frac{dK}{dz} = o$, $\frac{d^2K}{dz^2} = o$, $\frac{d^3K}{dz^3} = 6\,g^2\,(B - A)$ ergo positiva sit. K positiva erit usque ad $z = B$, ubi, (quum hoc pacto $\frac{dK}{dz} = - g^2\,(B - A)^3$) signum commutat. Curva igitur non nisi inter fines A et B est, $\frac{dK}{dz}$ inter hos fines $= o$ fieri necesse est, nam signum commutat. Posita igitur $\frac{dK}{dz} = o$, $z = A$ et $z = B - \frac{1}{4}\,(B - A)$ habemus, qui valor haud dubie inter A et B est, unde $\frac{dK}{dz}$ intra hos fines semel tuntummodo $= o$ fieri potest. Maximum y^2 huic puncto respondens $= \frac{27\,g^2\,(B - A)^4}{1024\,a^2}$ erit (maximum $+y$ et minimum $-y$) et in eo tangens plano xz parallela est, sed, ubi $z = B$ hoc planum (quum $\frac{dy}{dz}$ et $\frac{dy}{dx}$ tum $= \infty$ fiant) perpendiculariter secat. Si $z = A$ ponitur, curva in eo puncto plani xz in quo ejus partes (quod attinet ad $\pm$ y) symmetricae conjunguntur, verticem format, cujus tangens in plano xz jacens ad axem z inclinatur sub angulo, cujus

$tg = \frac{dx}{dz} = \frac{f + 2 g A}{2 a}$ est. 2., Si B — A negativa est, pariter res se habebit. Curva eandem, quam si (B—A) positiva fuit, habuit, formam habebit, sed illi oppositam, quod facile intelligitur.

III. Si M. unum positivum valorem duosque $= o$ habet, $8 a^2 (2 a^2n^2 - 2 ghn + f^2n - mfg) = o$, $16 a^4 (nf - mg) = o$, $(- 4 gh + 8 a^2n + f^2)$ positiva esse debet, et y et z quatuor reales, quarum binae pares sunt, radices habebit $y = {}^{+}_{+}\sqrt{(\frac{1}{4} f^2 + gh)}$ $= \sqrt{(\frac{1}{4} f^2 + gh)}$ $z = {}^{+}_{+} \frac{\sqrt{\frac{1}{4} f^2 + gh}}{g} \frac{-f}{2g}$ $= \frac{\sqrt{\frac{1}{4} f^2 + gh}}{g} \frac{-f}{2g}$ Haec conditio jam (initio §. 2) perquisita est.

Si brevitatis causa $216 a^2 (nf - mg) = r$, $24 a^2 (2 a^2n^2 - 2 ghn + f^2n - mfg) = q$, $f^2 + 8 a^2n - 4 gh = p$, denique $(r^2 + 2 p^3r + q^3 - 3 pqr - \frac{3}{4} p^2q^2) = N$ ponimus, aequatio (2,), si $N = o$ est, tres reales radices, de quibus duae pares sunt, si N negativa est, tres impares reales, si N positiva est, duas imaginarias radices habet. Deinde aequatio (2.) tot signorum vicissitudines, quot positivas, et eorum consecutiones, quot negativas radices habebit.

IV. Si $N = o$ et p atque q positiva sunt, z duos pares, duosque impares reales valores habet, Paribus valoribus $= C$, ceteris $= A$, B positis, ita quidem, ut B — A positiva sit, curva non nisi intra fines $z = A$ et $z = B$ est.

Si $z = A$ est, curva ex negativo in positivum, in puncto, cui $z = B$ respondet, ex positivo in negativum transit ita, ut in puncto, ubi $z = C$, nisi C illis finibsu includitur, curva, quamvis $K = o$ fiat, tamen singulare quoddam punctum, in quo corpora rotantia se tangunt, formabit. In punctis $z = A$, $z = B$ tangens planum xz perpendiculariter secat, et $\frac{dK}{dz}$ semel tantum, C intra A et B non posita, $= o$ fieri, unum maximum igitur y^2 formare potest, Verum si C intra A et B est, et intra $z = A$ et $z = C$ aeque atque intra $z = C$ et $z = B$ maximum y^2 est, in puncto $z = C$, $y = o$ ergo curvae duplex vertex erit. Cui puncto duae tangentes sunt, quae neque in plano xz

jacent, neque id perpendiculariter secant, verum in hoc planum sub angulo, cujus tang $= \frac{dy}{dz} =$

$$g \frac{(C - A)(B - C)}{\pm 2a\sqrt{(C-A)(B-C)}},$$

inclinantur. Duo illa maxima, $\frac{dK}{dz} = o$ posita, inveniuntur. Quo pacto igitur curva duo maxima duoque minima habet. (vide §. 3 cond. IV cfr. §. 4, cond. 2. — De ordinata crescente ac decrescente vid. cond. VII.)

V, Si N = o et quantitatum, p, q aut neutra aut certe alterutra positiva est, z duas imaginarias duasque pares reales radices habet. Si pares valores = A ponimus K tantum, valore z = A posito, = o redditur, postquam antea negativa fuit. In hoc puncto maximum nacta, iterum in negativum descendit, et curva hoc pacto tantum unum singulare punctum complectitur, quod in plano xz jacens coordinatas z = A, y = o, $x = \frac{h + fA + gA^2}{2a}$ habet et in quo corpora rotantia se tangunt.

VI. Si N negativa, p, q, positiva est, z quatuor impares reales valores habet, Si hos valores A, B, C, D ita, ut $A < B < C < D$ sit, nominamus, curva ex duabus disjunctis partibus constat, quarum altera a z = A usque ad z = B, altera a z = C ad z = D porrigitur. Inter z = B et z = C K negativa, curva igitur imaginaria est. In z = A, z = B, z = C, z = D, planum xz perpendiculariter secatur et in utraque harum partium unum maximum y^2 formatur. Posita enim $\frac{dK}{dz} = o$, alterum maximum inter A et B alterum inter C et D jacet. Quae res cur ita sit, vide §. 3, cond. IV. De ordinatax crescente ac decrescente vid: cond. VIII.

VII. Si N positiva est, z duos impares reales duosque imaginarios valores habet. Valoribus realibus A et B ita ut (B—A) positiva sit, nominatis, K ab $z = -\infty$ usque ad z = A negativa et $\frac{dK}{dz}$ paulo ante punctum, ubi z = A est, positiva esse debet. Quum, si z = A ponimus, $\frac{dK}{dz}$ quia aequatio nostra duos pares valores non habet, neque = o, neque = ∞ fieri possit, K in puncto

cui $z = A$ respondet, crescit et usque ad $z = B$ positiva erit. Hic, quum K ab $z = + \infty$ usque ad B negativa sit, iterum in negativum revertitur. Curva igitur tantum finibus $z = A$ et $z = B$ includitur, inter quos certe unum maximum y erit. Quod ut inveniamus, $\frac{dK}{dz} = (4 a^2 m - 2 fh) + 2 (4 a^2 n - f^2 - 2 gh) z - 6 fgz^2 - 4 g^2 z^3 = o$ ponitur. Quae aequatio, si inter A et B unum realem valorem z habet, huic valori unum maximum $+ y$ unumque minimum $- y$ respondet. Etiamsi omnes tres inter A et B jaceant, eorum autem duo aut omnes tres pares sint, tamen unum maximum, unumque minimum y erit. Sed si omnes valores, (D, E F, ita ut $D < E < F$ sit) impares et inter A ac B sunt, y^2 ab $z = A$ crescit usque ad $z = D$, ubi maximum nacta, decrescit usque ad $z = E$; hic minimum habet, tum denuo crescit usque ad $z = F$, ubi secundum et absolutum maximum nanciscitur, deinde decrescit, donec, si $z = B$ est, $= o$ facta, negativa fiat. Curva igitur tria maxima triaque minima y habet: maxima y_1 (si $z = D)_1$ $- y_2$ (si $z = E$), $+ y_3$ (si $z = F$), minima $- y_1 + y_2 - y_3$ quorum duo relativa maxima vel minima esse debent. Quibus omnibus in punctis curvae tangens plano xz parallela est, verum, ubi $z = A$, $z = B$ est, hoc planum perpendiculariter secat, quum $\frac{dy}{dz}$ et $\frac{dy}{dx}$, si in earum aequatione $z = A$, $z = B$ ponimus, $= \infty$ fiant. Curva in se revertitur. Ejus parabolica project.o jam §. 1 disquisita est. De ordinata x, quomodo crescat aut decrescat, vide cond. VIII.

VIII. Si N negativa et quantitatum p, q ne utra aut alterutra tantum positiva est, z tantum imaginarios valores habet. K hic neque $= o$, neque positiva fieri potest, corpora rotatoria hoc pacto igitur nusquam se tangunt.

Restat etiam, ut de $\frac{dx}{dz}$ i.e. de ordinata x, quomodo crescat et decrescat, aliquid dicamus, si ponimus, ut curvae pars quaedam certis finibus circumscripta sit. Ex aequationibus $x = \frac{h + fz + gz^2}{2 a}$, $\frac{dx}{dz} = \frac{f + 2 gz}{2 a}$, $\frac{d^2 x}{dz^2} = \frac{g}{a}$ et quum $\frac{dx}{dz}$ si $z = \frac{- f}{2g}$ ponimus, signum commutet sequitur ut, si $\frac{- f}{2 g}$ inter A et B jacet, x in hoc puncto absolutum maximum aut minimum nanciscatur, prout g ne-

gativa aut positiva est. Negativa igitur g posita, x crescit ab z = A (ubi minimum x = $\frac{h + fA + gA^2}{2a}$) usque ad z = $\frac{-f}{2g}$ (ubi maximum x erit = $-\frac{4gh - f^2)}{8ag}$ tum decrescit usque ae z = B (ubi minimum nanciscitur = $\frac{h + fB + gB^2}{2a}$). Si g positivam ponimus, contraria rei ratio est. Sed si $\frac{-f}{2g}$ inter A et B non jacet, $\frac{dx}{dz}$ inter hos fines signum non commutabit, quare x inter eos continuo crescit aut decrescit, prout $\frac{h + fA + gA^2}{2a} <> \frac{h + fB + gB^2}{2a}$ est. Hoc pacto valores extremi x valoribus extremis z accurate respondent. Denique x positiva et negativa esse, attamen non saepius, quam bis = o fieri potest. Si x = o est, z = $\frac{-f \pm \sqrt{(f^2 - 4gh)}}{2g}$ redditur. Quorum valorum si neuter inter A et B jacet aut etiam, si imaginarii sunt, x in curvae aequatione nunquam = o fieri potest. Si alter eorum inter A et B est, x semel = o fit, si uterque, x bis = o fieri potest, tamen si iisdem valoribus $\frac{-f}{2g}$ quoque includitur,

Si curvae nostrae proprium in universum et analytice describere volumus, ex ejus aequationibus quinque illae constantes eliminandae sunt. Quo facto curvae, quae tantum sectionibus conicis, quibus exoritur, similis quodammodo erit, aequationem, quam dicunt, differentialem, invenimus:

$$\frac{d^3x}{dz^3} = 0$$

$$2z\left(y\frac{dy}{dz} + x\frac{dx}{dz}\right) = z^2\left\{\left(\frac{dy^2}{dz^2} + y\frac{d^2y}{dz^2}\right) + \left(\frac{dx^2}{dz^2} + x\frac{d^2x}{dz^2}\right)\right\} + (y^2 + x^2)$$

Quidquid curvae nostrae proprium est, sex his quantitatibus, z, x, y, $\frac{dx}{dz}$, $\frac{d^2x}{dz^2}$, $\frac{dy}{dz}$ analytice exprimi potest.

Vita.

Natus sum Ernestus **Baumgardt** a. MDCCCXVIII Gollnoviae, oppido Pommeraniae, fidei evangelicae addictus, patre Joanne, matre e gente Kochiana. Postquam prima litterarum elementa in schola publica Gollnoviensi percepi, in disciplinam gymnasii regii Sedinensis tunc ut hodie Hasselbachio rectore clarissimo florentis quatuordecim annos natus traditus et in quintum ejus ordinem receptus sum. Quo in gymnasio per sex annos et sex menses degi litterarum disciplina usus. Prima mathematicorum elementa ab illustrissimo Scheibert, nunc scholae, quam vocant, realis rectore, percepi, cui, quum eximia docendi facultate summaque erga me benevolentia primus mathematicorum amorem in me excitaverit, gratiam semper quam maximam habebo. Virorum deinde illustrissimorum Jantzeni, Heringii, Schmidtii, Giesebrechti, Grasmanni, professorum, Hasselbachii, directoris scholas frequentavi; quibus omnibus, imprimis viro clarissimo Hasselbachio propter maxima eorum de me merita summamque erga me humanitatem gratissimum animum ad mortem usque servabo. Examine, quod abeuntium vocant, superato anno MDCCCXXXVIII a. d. II. Nov. ab ill. Otto t. t. Rectore Magnifico inter cives academicos receptus ordinique philosophorum adscriptus audivi lectiones philosophicas Branissii, Rohovskii, mathematicas Scholtzii, physicas Pohlii, Frankenhemii, a Boguslawskii, Gravenhorsti, Glockeri, Neesii ab Esenbeck, Mülleri, philologicas Elvenichii, historicas Stenzelii, Kutzeni. Quibus omnibus viris clarissimis praecipue autem ill. Rohovskio, Pohlo, a Boguslawskio, Frankenheimio et Scholtzio! qui privata etiam insti-

tutione ac prudentibus consiliis me adjuverunt, maximas gratias debeo. Triennio exacto quum Amplissimus philosophorum ordo quaestionem proposuisset: |disquirantur lineae duplicis curvaturae sectione superficierum rotatoriarum secundi ordinis oriundae, quarum axes rotationis sint principales et alter alteri paralleli, — ego ad eam respondere ausus sum, atque pretio scriptiuncula mea digna visa est, qua ut dissertationis loco uterer, idem ordo Amplissimus roganti mihi benevole concessit.

Theses.

1. Uniuscujusque chemici processus proprium est, ut formam duplicis affinitatis habeat.

2. Chemicum mineralogiae systema aliis praeferendum est.

3. Colore interdum tantummodo, quo in mineralogia distinguamus, uti possumus.

4. Acidum nitrico-nitrosum mixtio mechanica est.

5. Theoria, quam dicunt undulationis, colores prismatici demonstrari non possunt.